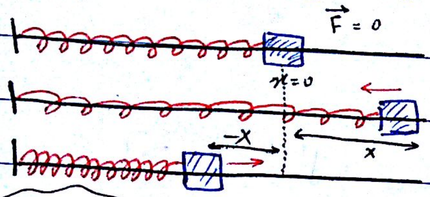
م. فاطمة

محاضرة -٢-

الاهتزازات

- الحركة الدورية: هي الحركة التي يعود فيها الجسم إلى مواقع محددة بعد زمن ثابت
- حركة جسم معلق بنابض:



$$F = -kX$$

دراسة الحركة الاهتزازية:

- X: الإزاحة (المسافة التي يبتعد فيها الجسم عن موضع توازنه)
- A: السعة (المسافة العظمى للإزاحة عن مركز التوازن)
- T: دور الحركة (s)
- F: تواتر الحركة (Hz)

$$F = \frac{1}{T} \quad \text{أو} \quad T = \frac{1}{F}$$

أما إذا أصبح النابض شاقولي فيزداد طوله

- تدل الإشارة (-) على أن قوة الإرجاع F تتجه باتجاه يعاكس التمدد (أو الانضغاط)

- التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة:

[1] $F = ma$

[2] $F_s = -kX$

$$ma = -kX$$

$$a = \frac{d^2X}{dt^2} \Rightarrow m\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right) = -kX$$

[3] $\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k}{m}X$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k}{m}X = 0 \qquad \frac{k}{m} = w^2$$

$$X = \cos wt \quad \text{أو} \quad X = \sin wt$$

$$\frac{dX}{dt} = -w \sin wt$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -w^2 \cos wt = -w^2 \cdot X$$

نعمم:

[4] $X_{(t)} = a\cos wt + b\sin wt$

$$\frac{dX}{dt} = -aw\sin wt + bw\cos wt$$

[5] $\frac{d^2X}{dt^2} = -aw^2\cos wt - bw^2\sin wt$

نعوض من [5] في [3]

$$-\frac{k}{m}(a\cos wt + b\sin wt) = -w^2(a\cos wt + b\sin wt)$$

$$-\frac{k}{m} + w^2 = 0 \Rightarrow w^2 = \frac{k}{m}$$

والحل العام من الشكل

$$X_{(t)} = a\cos wt + b\sin wt$$

حيث:

$$w^2 = \frac{k}{m}$$

1 الإزاحة العظمى :

$t = 0$

$a = A \longrightarrow X(t) = A\cos wt$

$b = 0$

2 في وضع التوازن :

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ a = 0 \\ b = A \end{array}\right\} X(t) = A\sin wt$$

3 في حال شد الجسم إلى مسافة أقل من A : $x < A$

يتم تعيينها من الموضع والسرعة $\left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right.$

- تمرين : نعلق بنابض ما كتلة مقدارها $m = 0,300kg$ فيستطيل النابض بمقدار $0,15m$ = X ، نطبق استطالة إضافية قدرها $0,100m$ عن وضع التوازن ونترك دون سرعة ابتدائية والمطلوب :

1- ثابت صلابة النابض k

2- سعة الاهتزاز

3- سرعته العظمى V_{max}

4- تسارعه الأعظمي a_{max}

5- دوره T وتواتره F

6- معادلة الحركة

7- السرعة عندما $t = 0,15(s)$

- الحل

$F = kX = mg$

(1) $k = \frac{m \cdot g}{X} = \frac{(0,300kg)(9,82 m \cdot s^{-2})}{(0,15m)} = 19,64 \ N/m$

(2) $A = 0,100m$

بما أن النابض استطال بمقدار $(0,100m)$ وترك دون اكسابه حركة ابتدائية فإن $A = 0,1m$ وهي سعة الاهتزاز

(3) $X = A\cos wt$

$V_{max} = wA = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A$

$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

SABBAGH STATIONERY

$$V_{max} = \sqrt{\frac{(19{,}6 N/m)}{(0{,}300 kg)}} \cdot (0{,}100 m)$$

$$V_{max} = 0{,}808\ m.s^{-1}$$

(4)

$$a_{max} = w^2 A = \frac{k}{m} \cdot A$$

$$a_{max} = \frac{(19{,}6 N/m)}{(0{,}300 kg)} \cdot (0{,}100 m) = 6{,}53\ m.s^{-2}$$

(5)

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{(0{,}300 kg)}{(19{,}6 N/m)}}$$

$$T = 0{,}7769\ (s)$$

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{0776} = 1{,}28708\ HZ$$

(6)

$$X = -A \cos wt$$

إذا اعتبرنا محور الحركة نحو الأعلى والاستطالة نحو الأسفل

$$= -A \cos(2\pi f t)$$

مع العلم: $w = 2\pi f$

ملاحظة: بما أن التابع ~~الجيبي~~ الجيب والجيب تمام تابعان يتكرران بدور مقداره (2π) فإن: $wT = 2\pi \Rightarrow w = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow w = 2\pi f$$

تبدأ الحركة من نقطة الإزاحة العظمى للأسفل إذا وجهنا المحور X نحو الأعلى

$$X = -0{,}100 \cos(8{,}03 t)$$

بالمقارنة مع معادلة الحركة: $X = A\cos(wt + \varphi)$

نجد أن: $\phi = \pi\ rad = 180°$ "الطور الابتدائي"

(7)

تحسب السرعة في أي لحظة زمنية بالشكل الآتي:

$$V = \frac{dX}{dt} = +2\pi f A \sin(2\pi f t)$$

$$= (6{,}28)(1{,}287)(0{,}100) \sin(6{,}28 \times 1{,}28 \times t)$$

$$= 0{,}810 \sin(8{,}10 t)$$

$$= 0{,}810 \sin(1{,}22)$$

$$= 0{,}761\ m.s^{-1}$$